ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОРПОРАТИВНЫХ ПЕНСИОННЫХ ПРОГРАММ

Елена КРЮКОВА
Главный актуарий НПФ «Империя», доцент кафедры «Математического анализа и теории функций» Волгоградского государственного университета, кандидат технических наук

Устойчивость корпоративной программы устанавливается в процессе актуарного оценивания соотношения активов и обязательств на фиксированный момент времени. Активы определяются суммой пенсионного резерва на пенсионном счете предприятия-вкладчика. Обязательства – как математическое ожидание современной стоимости будущих выплат. При этом окончательный вывод об устойчивости пенсионной программы на основании выполнения равенства в данный момент активов и обязательств сильно зависит от принятой для расчета актуарной нормы доходности и используемых таблиц смертности, т.е. является весьма субъективным. Это приводит чаще всего к завышению необходимого размера пенсионных взносов предприятия, обеспечивающих заданный уровень финансирования даже при умеренно консервативных предположениях актуария. В частности поэтому финансирование пожизненного пенсионного обеспечения работников для предприятий представляет большую финансовую нагрузку. Кроме того, эта статическая модель не дает ответа на вопрос о будущем соотношении активов и обязательств и тем более не позволяет определить количественные критерии устойчивости на протяжении всего периода существования программы.

Поэтому представляет интерес рассмотреть динамику изменения пенсионного резерва и найти условия минимально необходимого финансирования, обеспечивающего финансовую устойчивость страховой пенсионной программы предприятия.

Для этого необходимо исследовать процесс изменения численности участников данной пенсионной программы по причине смерти и построить модель изменения общей суммы выплат для исследуемой группы участников.

Аналитический метод, развитый в работах Колмогорова, Феллера [1,2], позволяет воспользоваться моделью коллективного риска [3] для нахождения совместного распределения общей суммы пожизненных выплат участникам разных возрастов с последующим решением дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей.

Второй вероятностный подход, предложенный Леви и строго обоснованный Ито, дает возможность непосредственного построения траекторий процесса [4]. Использовать данные подходы для описания динамики фонда предложено В.И. Пелихом [5].

1. Исследование процесса смертности участников пенсионной программы

Данные демографических исследований [6, 7], в том числе прогнозы ООН и Центра демографии и экологии человека (ЦДЭЧ), не исключают роста смертности в ближайшие годы примерно до 2008 года. В дальнейшем рост смертности взрослых продолжится, но будет очень медленным. Смертность детей по-прежнему будет снижаться, так что средняя продолжительность жизни меняться не будет. В дальнейшем увеличение ожидаемой продолжительности жизни, по прогнозам ЦДЭЧ, к 2045–2050 годам для мужчин с 61 до 73,8 лет, для женщин с 73 до 77 лет предполагается за счет уменьшения детской смертности.

Динамику смертности населения Волгоградской области возраста от 50 до 80 лет исследовали на основании данных таблиц смертности городского населения (оба пола) Северо-Кавказско-

Рисунок 1

Динамика смертности городского населения Волгоградской области для разных лет

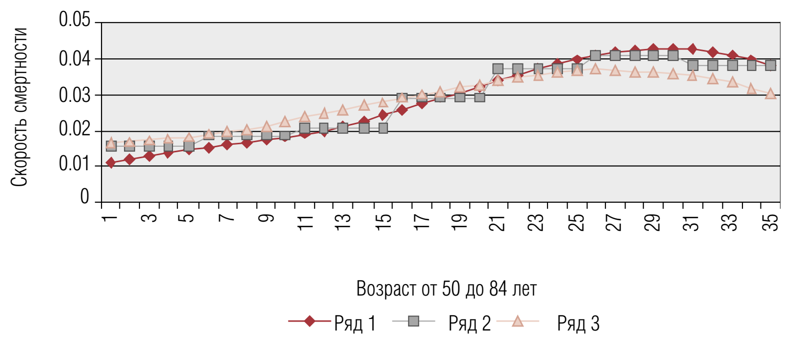
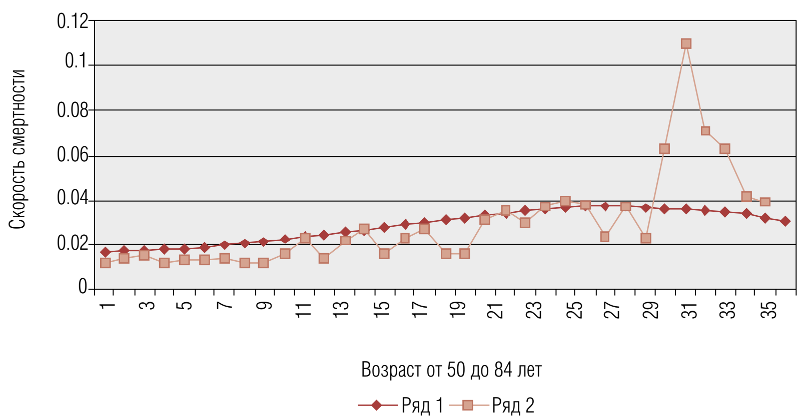


Рисунок 2

Динамика смертности населения Волгоградской области



Ряд 1. Таблицы смертности городского населения Волгоградской области, оба пола, 2002 г.
Ряд 2. Данные смертности работников предприятия химической промышленности г. Волгограда, 2000–2004 гг.

го региона 1992 года, Волгоградской области 1996 года и 2002 года и предприятий химической промышленности г. Волгограда. Данные представлены на рисунках 1, 2.

Таблицы смертности Северо-Кавказского региона, оба пола, 1992 год.

1. Таблицы смертности городского населения Волгоградской области, оба пола, 1996 год.

2. Таблицы смертности городского населения Волгоградской области, оба пола, 2002 год.

Сравнение данных таблиц смертности населения Северо-Кавказского региона Российской Федерации 1992 года и городского населения Волгоградской области 1996 года, 2002 года, представленное на рисунке 1, показывает, что смертность лиц возраста от 50 до 70 лет увеличивается, старше 70 лет — снижается. Таким образом, выбор таблиц смертности может оказывать заметное влияние на результат расчета, зависящее от половозрастного состава участников.

Поэтому задача исследования смертности участников пенсионного плана имеет важное значение для расчета параметров, обеспечивающих устойчивость корпоративной пенсионной программы.

Данные наблюдений за смертностью работников предприятия химической промышленности в период с 2000 по 2005 год близки к данным таблицы смертности населения Волгоградской области 2002 года.

На рисунке 2 наблюдается максимум для возраста $x=77$ лет, который появляется при уменьшении числа участников $l_x < 10$. Это может быть связано с тем, что число умерших может оказаться меньше, чем расчетное значение в соответствии с вероятностью смерти в данном году, т.е. число умерших участников в этом случае будет зависеть от числа умерших ранее участников и процесс на его конечной стадии в последний год уже не будет Марковским.

Таким образом, процесс смертности может быть представлен как Марковский для исследуемой группы участников до возраста 77 лет.

Представленные данные показывают:

1) скорость смертности зависит от возраста;

2) скорость смертности зависит от года наблюдения;

3) зависимость скорости смертности от года наблюдения различна для разных возрастов — увеличивается в период с 1992 по 2002 год для возраста менее 70 лет и уменьшается для возраста более 70 лет (табл. № 1).

Таким образом, предположение о независимости скорости смерти для участника данного возраста от года наблюдения допустимо на временных интервалах до 5 лет. Это подтверждается также данными таблицы № 1.

Кроме того, приращения скорости смертности не являются не только независимыми, но и ортогональными. Как показывают экспериментальные данные для произвольных моментов времени $0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le t_4$ ковариация приращений процесса не равна нулю $\mathrm{cov}\{\Delta\xi(t_1,t_2),\Delta\xi(t_3,t_4)\neq 0\}$ и имеет место сильная зависимость — коэффициент корреляции близок к единице, что указывает на наличие линейной связи.

Таблица № 1

Зависимость скорости смертности $\xi_x(t)$ от года наблюдения по отношению к 1992 году

Возраст, x	$\frac{\xi(x,1996)}{\xi(x,1992)}$	$\frac{\xi(x,2002)}{\xi(x,1992)}$
50	1,39	1,48
60	1,10	1,27
70	1,09	1,00
80	0,88	0,83

Наличие сильной зависимости можно объяснить тем, что смерти разных лиц, являясь независимыми между собой, в то же время зависят от положения на оси времени, т.е. от возраста.

Для приращений скорости смерти установлено, что математическое ожидание приращений скорости смерти и дисперсия увеличиваются с возрастом, особенно сильно для возраста более 67 лет.

Таким образом, процесс смертности как для скорости смерти, так и для приращений скорости смерти нестационарный с экспоненциальным трендом.

Поэтому известные нестационарные модели типа TS, приводимые к стационарному путем взятия линейного тренда, и процессы случайного блуждания с дрейфом, приводимые к стационарному путем взятия первой разности, а также модели Перрона, разбиваемые на стационарные линейные участки [8], не могут быть использованы для описания процесса смертности старших возрастов 50–80 лет, т.к. приращения скорости смерти не линейны и не стационарны. Многочисленные исследования зарубежных авторов также указывают на трудности моделирования процесса смертности единой функцией [9,10].

Поэтому для построения модели пожизненных пенсионных выплат участников пенсионного возраста 50–80 лет был использован первый подход, позволяющий описать процесс приращений скорости смерти аналитической зависимостью и найти переходные вероятности посредством модели коллективного риска.

Часть II. Моделирование процесса пожизненных пенсионных выплат

Совокупность инвестированных средств (пенсионных резервов) группы участников, представляющих собой сумму взносов для покрытия принятых обязательств и начисленный на них инвестиционный доход, будем называть фондом размера F_t в момент времени t. Фонд предназначен для пожизненных выплат участникам, причем размер выплат каждому отдельному участнику различен. Общую сумму будущих выплат, осуществляемых от момента наблюдения $t_0 = 0$ до момента смерти последнего участника $t_n = n$ лет, можно рассматривать как результат по крайней мере двух случайных процессов: случайного процесса смертности участников и случайного значения общей суммы выплат умерших участников.

Случайный процесс смертности участников обусловлен двумя видами риска.

Первый риск – это несистематический риск – риск того, что действительное число смертей отличается от принятого для расчета. Этот тип риска может быть диверсифицирован, т.е. устранен для большой группы участников, обычным предположением, что будущие времена жизни различных лиц являются независимыми случайными величинами. Поэтому этот риск смертности не ведет к необходимости дополнительной рисковой премии. Второй тип риска – это систематический риск – риск того, что сила смертности изменяется отличным от предполагаемого образом. Именно этот риск необходимо учесть при построении модели процесса скорости смерти.

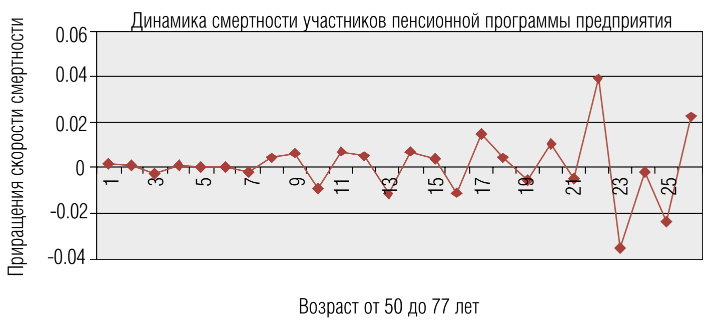
2.1. Определение случайного процесса скорости смерти

Для построения модели процесса будем использовать величину скорости смерти:

$$_{t|}v_x = \frac{d_{x+t}}{N_x},$$

Рисунок 3

Динамика приращений скорости смертности для работников предприятия химической промышленности



где N_x – число лиц возраста x группы участников пенсионной программы в начальный момент наблюдения $t_0 = 0$. С другой стороны, это число можно представить как сумму всех умерших участников до окончания пенсионной программы пожизненных выплат:

$$N_x = \sum_{j=x}^{w} d_j ,$$

w – предельный возраст дожития.

Рассмотрим случайный процесс смертности участников как случайный дискретный процесс $\{\xi(t,\varpi), t\in[t_0,t_w]\}$, поскольку данные о числе умерших известны на начало каждого года. Наблюдения над участниками предприятия общей численностью 1500 человек проводили в течение 5 лет. Исследуемый случайный процесс для каждой когорты k можно определить следующим образом $\xi_{tk}(\varpi)=\xi_{tk}({}_{t|}v_x)_k$ — доля лиц от исходной совокупности, умирающих в единицу времени. При фиксированных моментах времени $t_0,t_1,t_2,...,t_n\in T$, где $0, 1, 2,..., n$ — номер года наблюдения, значения скорости смерти в сечениях $\xi_t(\varpi)$ являются случайными величинами, заданными при $n=\{0,1,2,3,4\}$. Время начала наблюдения t_O соответствует 2000 году.

Пусть ($\Omega,\Im,P$) — вероятностное пространство. Известны распределения вероятностей числа смертей в год для лиц одного возраста в сечениях процесса $t_0,t_1,t_2,...,t_n\in T$, где $0, 1, 2, 3, 4, n$— номер года наблюдения случайной величины $\xi(t,\varpi)$.

Для получения аналитической зависимости скорости смерти от возраста участника примем предположение, что распределения вероятности смерти участников одного возраста стационарны и не зависят от времени наблюдения. Математическое ожидание числа участников когорты возраста x (t_O) в момент времени t равно произведению исходного числа участников в когорте в момент начала наблюдения N_x на математическое ожидание числа смертей в год на одного участника:

$$M_{xt}(N_x\xi_{kt}(\varpi))=\lambda_{xt}=N_x\cdot\sum_i q_x\cdot p_i,$$

где q_x — число смертей в год на одного участника возраста x;

p_i — вероятность i-случая количества смертей в год в i-й год наблюдения [2000, 2005].

На основании предположения о стационарности процесса смертности для участников одного возраста будем считать распределения вероятностей скорости смерти в сечениях процесса $P_\xi(\varpi_1,\varpi_2,...,\varpi_n,t_1,t_2,...,t_n)\in R^1$ заданными для всех рассматриваемых моментов времени $\{t_1, t_2,..., t_w\}$ от момента начала наблюдения до момента смерти последнего участника. Для процесса с дискретными состояниями сумма полной вероятности событий скорости смерти от года начала наблюдения в возрасте x до момента окончания наблюдения в момент смерти в возрасте t_w равна 1:

$$\sum_{t=t_0}^{t=t_w} {}_{t|}v_x=\sum_{t=t_0}^{t=t_w}\frac{d_{x+t}}{N_x}=1.$$

Для построения математической модели процесса смертности участников приняты следующие предположения о свойствах процесса:

1) ординарности — т.к. вероятность смерти в бесконечно малый промежуток времени двухи более участников пренебрежимо мала;

2) отсутствием последействия, т.к. смерти участников происходят независимо друг от друга, т. е. число смертей в одном временном интервале не зависит от числа смертей в другом временном интервале;

3) не стационарности в течение общего времени пребывания участника в фонде, поскольку вероятность смерти участника зависит от его возраста, т.е. от положения участника на временной оси;

4) процесс смертности для лиц одного возраста стационарен и имеет математическое ожидание и дисперсию, не превышающую математическое ожидание, что свидетельствует об отсутствии смешивания [11].

Таким образом, процесс скорости смерти может быть представлен как сложный Марковский—Пуассоновский процесс с индикаторной функцией равной единице, если участник дожил до указанного возраста.

Потоки случайного процесса смертности для каждой когорты $\xi_{t,k}(\varpi)$ будем считать независимыми и ординарными. Поэтому интенсивность суммарного потока процесса смертности $a(t)$ равна сумме интенсивностей числа событий потоков для отдельных когорт:

$$a(t)=\lambda^{(k)}(t)=\sum_{k=1}^{K}\lambda_k(t)$$

Таким образом, распределение вероятностей для группы участников разных возрастов представляет собой также сложное распределение Пуассона с интенсивностью потока событий смерти равной сумме интенсивностей смерти для отдельных когорт.

2.2. Процесс изменения общей суммы пожизненных пенсионных выплат

С учетом того, что в данной модели мы рассматриваем выбытие участников только по причине смерти и новые участники не возникают, то процесс изменения общей суммы выплат умершим участникам:

$$B(t)=B_0+B_1+...B_n=\sum_{t=0}^{t=n}B_{ti}$$

Для случайной величины $B(t)$ случайная величина выплат i-му участнику B_i постоянна во времени для данного участника (если нет индексации). Случайные величины выплат участникам независимы, одинаково распределены и имеют общую функцию распределения $P(x)$. Поскольку смерти участников одного возраста равновероятны можно считать равновероятным выбытие любой суммы выплат в течение года.

Если при этом процесс смертности участников — Пуассоновский, то процесс изменения суммарных выплат $S(t)$ согласно [3] является сложно Пуассоновским, Марковским и вероятности перехода на шаге n описываются уравнением:

$$P[S(t_0+t)-S(t_0)\le x \mid S(s)\ \text{для всех}\ s\le t]=\sum_{n=0}^{n=\omega} e^{-at}\frac{(at)^n}{n!}\{P^{*n}(B_i)\},\quad (1)$$

или для приращений скорости смерти для всех $t_O<S<t$ и для числа переходов $n=0,1,2...$:

$$\mathrm{P}\{\Delta S(s,t)\le k \mid s<t\}=\sum_{n=0}^{n=w-x}\frac{(a(t)-a(s))^n}{n!}e^{-(a(s)-a(t))}\{P^{*n}(\Delta B_i)\}$$

Даже если пенсионные выплаты распределены неодинаково, то все равно суммарные выплаты за n летний период имеют сложное распределение Пуассона [3].

Способы вычисления распределения суммарных выплат описаны в [11].

Распределение вероятностей суммарных выплат на момент времени $t\in[t_0,t_w]$ равно произведению вероятности нахождения системы в исходном состоянии на матрицу вероятностей перехода $\|p_{ij}\|$ — сумму переходных вероятностей за n шагов:

$$p(t_n)=\sum_{i=0}^{n}p_{ij}\cdot p_i(0)\qquad (2)$$

Вероятность перехода системы из состояния ϖ_i в котором она находилась в момент времени t в состояние ϖ_j за элементарный промежуток времени Δt, приближенно равна $\lambda_{ij}(t)\Delta t$, где $\lambda_{ij}(t)$ - интенсивность Пуассоновского потока суммарных выплат, переводящего систему из состояния ϖ_i в состояние ϖ_j [1].

2.3. Модель приращений скорости смерти с учетом увеличения продолжительности жизни

Поскольку исследования показывают, что возможны различные изменения скорости смерти для участников разных возрастов, поэтому в разработанной модели предусмотрена возможность изменения скорости смерти для разных возрастов заданием различных значений параметров x_O и k_x:

$$\frac{\lambda_x(t)-\lambda_x(s)}{t-s}=\frac{\left[\exp\left(\frac{x_1}{x_0}-1\right)\right]-1}{100}\cdot\left[\frac{1+k_x(x_2-47)}{10}\right],\qquad (3)$$

для исследуемой группы участников:

$x_1\in[51,66]$; $x_0=50$; $x_2\in[67,80]$

Коэффициент k_x может быть задан таблицей. Этот коэффициент изменяется закономерно, т.е. процесс смертности исследуемых возрастов предсказуем. Хотя эта зависимость и различна для разных возрастов.

Зависимость скорости смерти от времени для различных возрастов может быть учтена в представленной модели изменением значений x_O и k_x. Сравнение результатов расчета по уравнениям модели с наблюдаемыми значениями представлено на рисунке 4.

3. Динамика фонда

Уравнение динамики фонда корпоративной пенсионной программы можно представить в виде:

$$F_t=F_0(1+\cdot e^{\delta t})-S(t),$$

δt — сила роста процентов за период времени t;

$S(t)$ — ожидаемое значение суммарных выплат фонда в момент времени t.

Пенсионная программа будет устойчива, если в любой момент времени, при котором число живых участников больше нуля, размер фонда также больше нуля: $F_t>0$ или $F_0(1+\cdot e^{\delta t})>S(t)$.

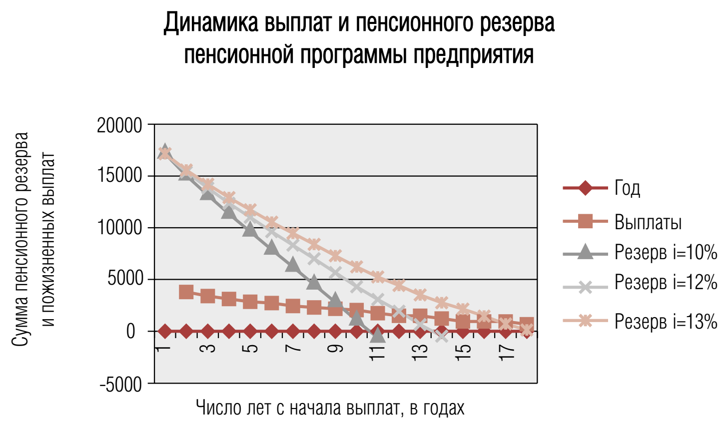
Пример выбора процентной ставки представлен на рисунке 5.

Последнее уравнение позволяет найти критическое значение процентной ставки, удовлетворяющее условию устойчивости данной пенсионной программы, и задать таким образом требования к составу инвестиционного портфеля пенсионных резервов.

Рисунок 4

Ряд 1 – экспериментальные данные скорости приращений скорости смерти участников пенсионной программы;
Ряд 2 – результаты расчета по разработанной модели приращений скорости смерти.

Рисунок 5



Литература

1. Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2000. – 383 с.

2. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Часть 1. Часть 2. М.: Мир,1964. – 484 с.

3. Н. Бауэрс и др. Актуарная математика. М.: Янус-К, 2001. – 655 с.

4. С. Ватанабэ, Н.Икэда. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука. 1986. – 445 с.

5. В.И.Пелих. Математическая теория НПФ. Доклад на конференции ВолГУ, апрель 2005 г.

6. Демографические перспективы России до 2100 года//В кн.: Население России 2002.

7. Смертность и продолжительность жизни//В кн.: Население России 2001.

8. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов. Лекционные и методические материалы. Экономический журнал ВШЭ, с. 85–401.

9. Andrew J.G.Cairns, David Blake, Kevin Dowd. Pricing Death: Frameworks for the Valuation and Securitization of mortality Risk. September 28, 2004.–36р. www.Casact.ajgc 42.

10. Andrew J.G.Cairns, David Blake, Kevin Dowd. A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with parameter Uncertanty. May 11, 2005.–28р. www.Casact.ajgc 44.

11.А.Г. Шоломицкий. Теория риска. Выбор при неопределенности и моделирование риска. – М.: ВШЭ, 2005. – 399 с.